

Тренинг  
«Решение задач ЕГЭ с  
использованием графов»

# Задача 1

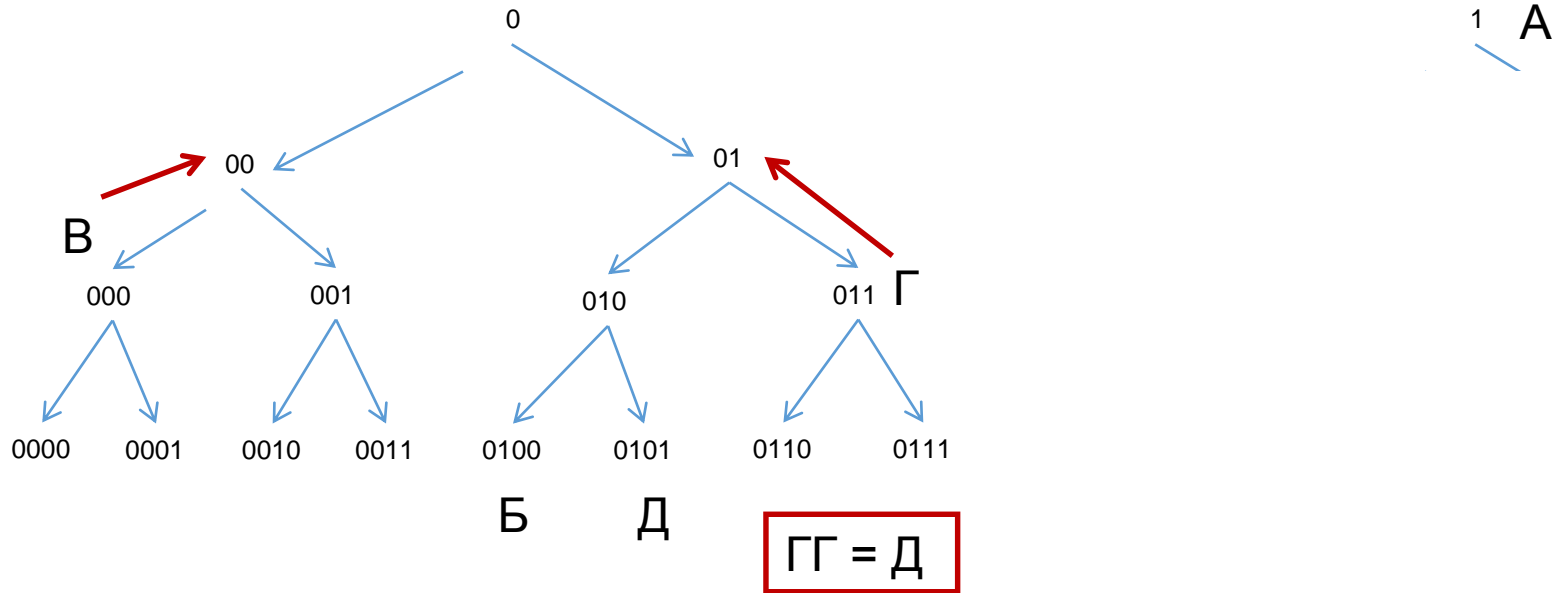
1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 1; Б – 0100; В – 000; Г – 011; Д – 0101. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны. Каким из указанных способов это можно сделать?

- 1) для буквы Г – 11
- 2) для буквы В – 00
- 3) для буквы Г – 01
- 4) это невозможно

Ответ:

# Решение



**Прямое правило Фано** – никакой код не должен быть началом другого кода.

**Обратное правило Фано** – никакой код не должен быть концом другого кода.

# Задача 2.

1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 0; Б – 100; В – 1010; Г – 111; Д – 110. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны. Каким из указанных способов это можно сделать?

- 1) для буквы В – 101
- 2) это невозможно
- 3) для буквы В – 010
- 4) для буквы Б – 10

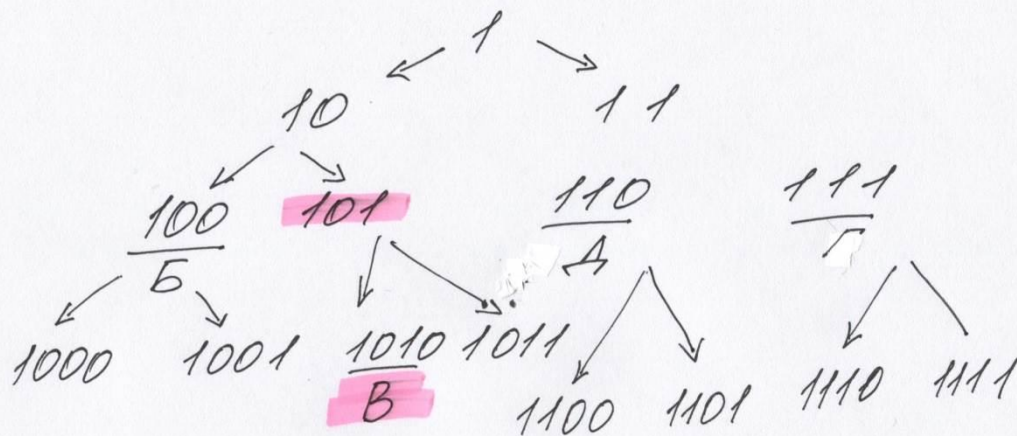
Ответ:

# Решение

1 - 2 дема 2015

A - 0      Б - 100      В - 1010      Г - 111      Д - 110  
обратное правило Фано не выполняется

0 - А



Можно "поэкспериментировать" с другими буквами и убедиться, что такое правило Фано будет выполняться только в выделенном случае.

Ответ: 1)

## Задача 3.

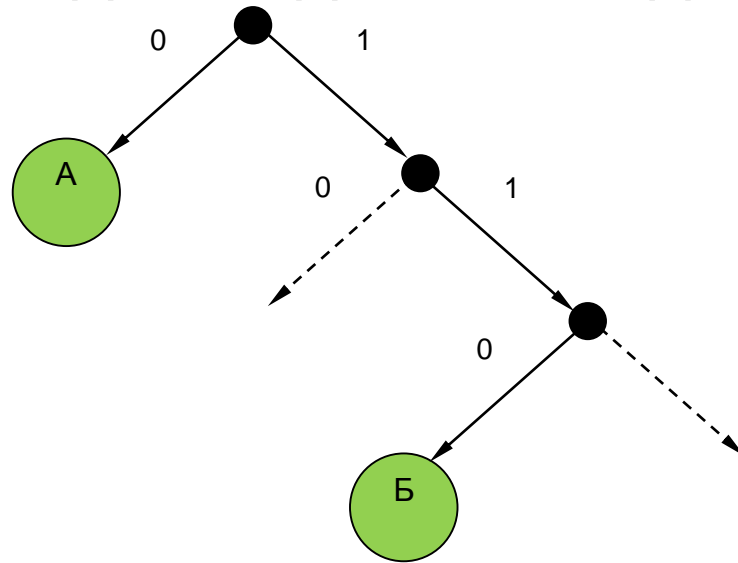
- *Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы А использовали кодовое слово 0, для буквы Б – кодовое слово 110. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?*

## Решение (способ 1, исключение вариантов):

- условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова
- поскольку уже есть кодовое слово 0, ни одно другое кодовое слово не может начинаться с 0
- поскольку есть код 110, запрещены кодовые слова 1, 11; кроме того, ни одно другое кодовое слово не может начинаться с 110
- таким образом, нужно выбрать еще два кодовых слова, для которых выполняются эти ограничения
- есть одно допустимое кодовое слово из двух символов: 10
- если выбрать кодовое слово 10 для буквы В, то остаётся одно допустимое трёхсимвольное кодовое слово – 111, которое можно выбрать для буквы Г
- таким образом, выбрав кодовые слова А – 0, Б – 110, В – 10, Г – 111, получаем суммарную длину кодовых слов 9 символов
- если же не выбрать В – 10, то есть три допустимых трёхсимвольных кодовых слова: 100, 101 и 110; при выборе любых двух из них для букв В и Г получаем суммарную длину кодовых слов 10, что больше 9; поэтому выбираем вариант 3 (9 символов)
- Ответ: 3.

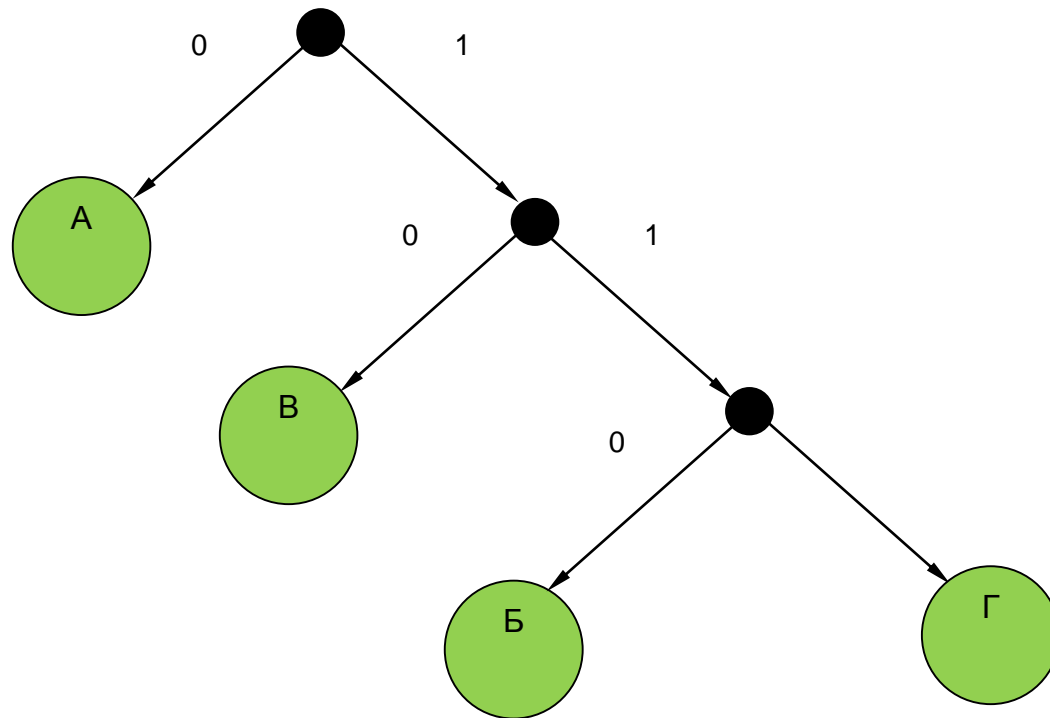
## Решение (способ 2, построение дерева):

- условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова; при этом в дереве кода все кодовые слова должны располагаться в листьях дерева, то есть в узлах, которые не имеют потомков;
- построим дерево для заданных кодовых слов А – 0 и Б – 110:



штриховыми линиями отмечены две «пустые» ветви, на которые можно «прикрепить» листья для кодовых слов букв В (10) и Г (111)





таким образом, выбрав кодовые слова А – 0, Б – 110, В – 10, Г – 111, получаем суммарную длину кодовых слов 9 символов

# Задачи для тренировки

1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Л использовали кодовое слово 1, для буквы М – кодовое слово 01. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

*Примечание.* Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Н использовали кодовое слово 0, для буквы К – кодовое слово 10. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

*Примечание.* Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1) 7

2) 8

3) 9

4) 10

# Задача 4

5

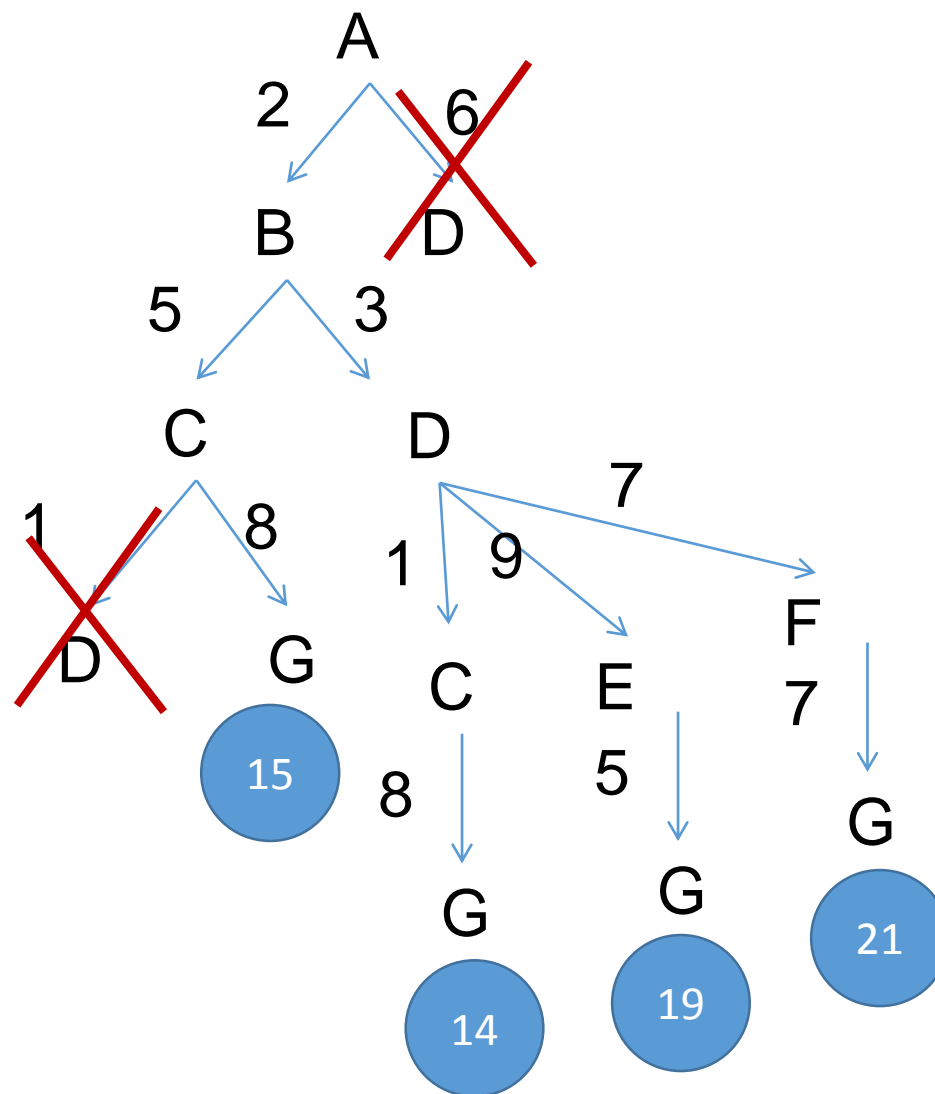
Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

|   | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 2 |   | 6 |   |   |   |
| B | 2 |   | 5 | 3 |   |   |   |
| C |   | 5 |   | 1 |   |   | 8 |
| D | 6 | 3 | 1 |   | 9 | 7 |   |
| E |   |   |   | 9 |   |   | 5 |
| F |   |   |   | 7 |   |   | 7 |
| G |   |   | 8 |   | 5 | 7 |   |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: \_\_\_\_\_.

# Решение



# Задача 5

- 5 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

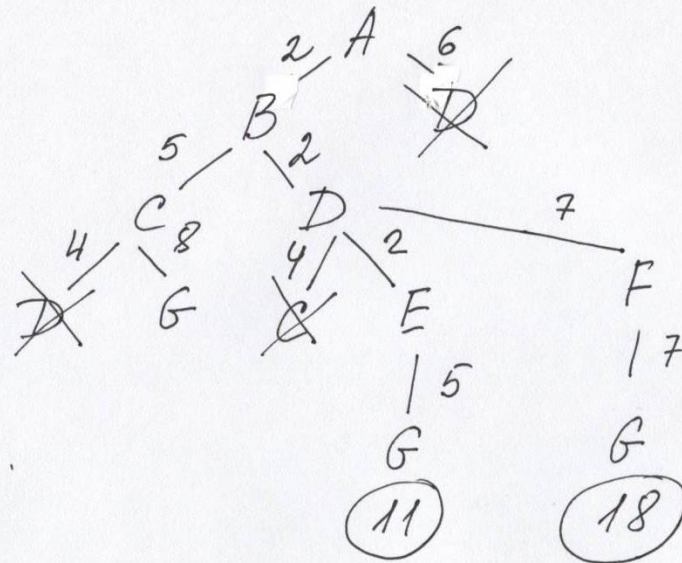
|   | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   | 2 |   | 6 |   |   |   |
| B | 2 |   | 5 | 2 |   |   |   |
| C |   | 5 |   | 4 |   |   | 8 |
| D | 6 | 2 | 4 |   | 2 | 7 |   |
| E |   |   |   | 2 |   |   | 5 |
| F |   |   |   | 7 |   |   | 7 |
| G |   |   | 8 |   | 5 | 7 |   |

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: \_\_\_\_\_.

# Решение

5-2 Диагностическая от 26.01.15 Вариант 2



Ответ: 11

# Задачи для тренировки

2

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет.

|   | A  | B | C | D  | E | F | Z  |
|---|----|---|---|----|---|---|----|
| A |    | 4 | 6 |    |   |   | 30 |
| B |    |   | 3 | 4  |   |   |    |
| C |    |   |   | 11 |   |   | 27 |
| D |    |   |   |    | 4 | 7 | 10 |
| E |    |   |   |    |   | 4 | 8  |
| F |    |   |   |    | 5 |   | 2  |
| Z | 29 |   |   |    |   |   |    |

Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: 7 маршрутов.



2

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет.

|   | A  | B | C | D  | E | F | Z  |
|---|----|---|---|----|---|---|----|
| A |    | 4 | 6 |    |   |   | 30 |
| B |    |   | 3 |    |   |   |    |
| C |    |   |   | 11 |   |   | 27 |
| D |    |   |   |    | 4 | 7 | 10 |
| E |    |   |   |    |   | 4 | 8  |
| F |    |   |   |    | 5 |   | 2  |
| Z | 29 |   |   |    |   |   |    |

Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: 6 маршрутов.

# Задача 6

11

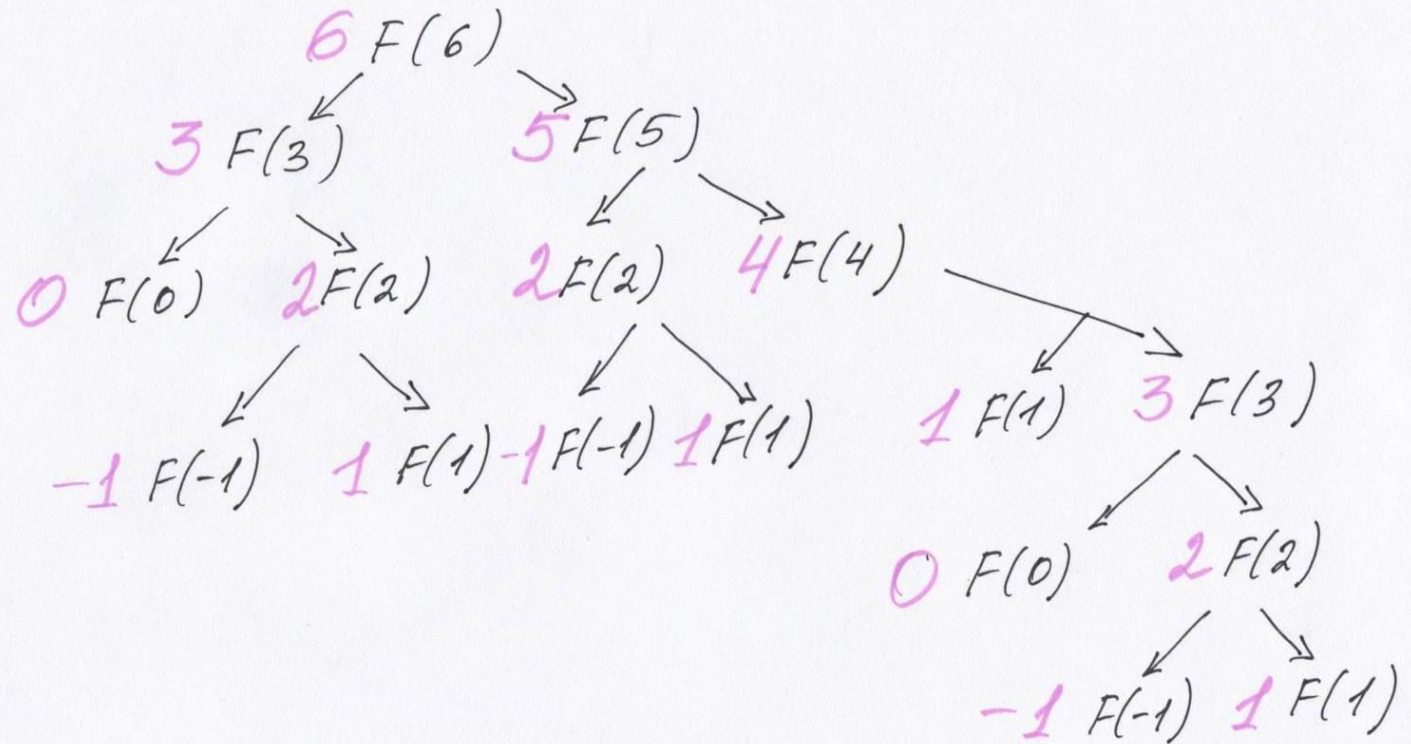
Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

| <b>Бейсик</b>   | <b>Python</b>   |
|---|---|
| <pre>SUB F(n)   PRINT n   IF n &gt; 1 THEN     F(n - 3)     F(n - 1)   END IF END SUB</pre>           | <pre>def F(n):   print(n)   if n &gt; 1:     F(n - 3)     F(n - 1)</pre>  |
| <b>Алгоритмический язык</b>   | <b>Паскаль</b>  |
| <pre>алг F(цел n) нач   вывод n, нс   если n &gt; 1 то     F(n - 3)     F(n - 1)   все кон</pre>      | <pre>procedure F(n: integer); begin   writeln(n);   if n &gt; 1 then     begin       F(n - 3);       F(n - 1)     end end</pre> |
| <b>Си</b>   |   |
| <pre>void F(int n) {   printf("%d\n", n);   if (n &gt; 1)   {     F(n - 3);     F(n - 1);   } }</pre> |   |

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(6)?

# Решение

19. 2 Аналитическая от 26.01.15 стр. 2



$$6 + 3 + 5 + 0 + 2 + 2 + 4 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 3 + 0 + 2 - 1 + 1 = 28$$

Ответ: 28

# Задачи для тренировки

11

Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

| Бейсик  | Python   |
|---|--|
| <pre>SUB F(n)   PRINT n   IF n &lt; 5 THEN     F(n + 1)     F(n + 3)   END IF END SUB</pre>                                 | <pre>def F(n):     print(n)     if n &lt; 5:         F(n + 1)         F(n + 3)</pre>   |
| Паскаль   | Алгоритмический язык   |
| <pre>procedure F(n: integer); begin   writeln(n);   if n &lt; 5 then   begin     F(n + 1);     F(n + 3)   end end end</pre> | <pre>алг F(цел n) нач   <u>ВЫВОД</u> n, <u>НС</u>   <u>если</u> n &lt; 5 <u>то</u>     F(n + 1)     F(n + 3)   <u>все</u> <u>кон</u></pre> |
| Си  |  |
| <pre>void F(int n) {   printf("%d\n", n);   if (n &lt; 5) {     F(n + 1);     F(n + 3);   } }</pre>                         |  |

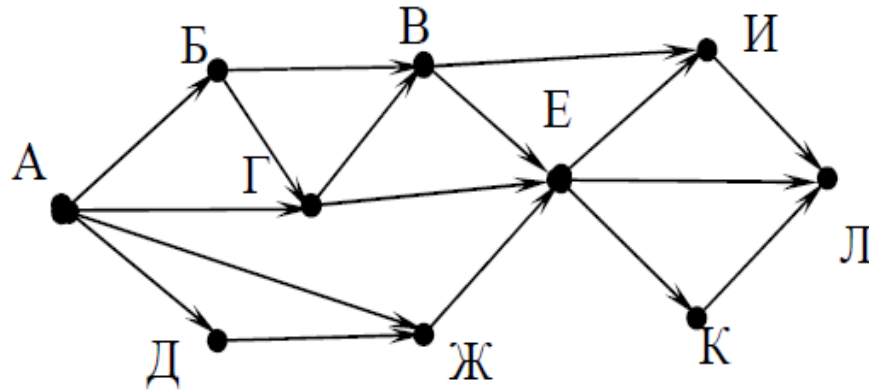
Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(1)?

Ответ: **49**\_\_\_\_\_.

# Задача 7

15

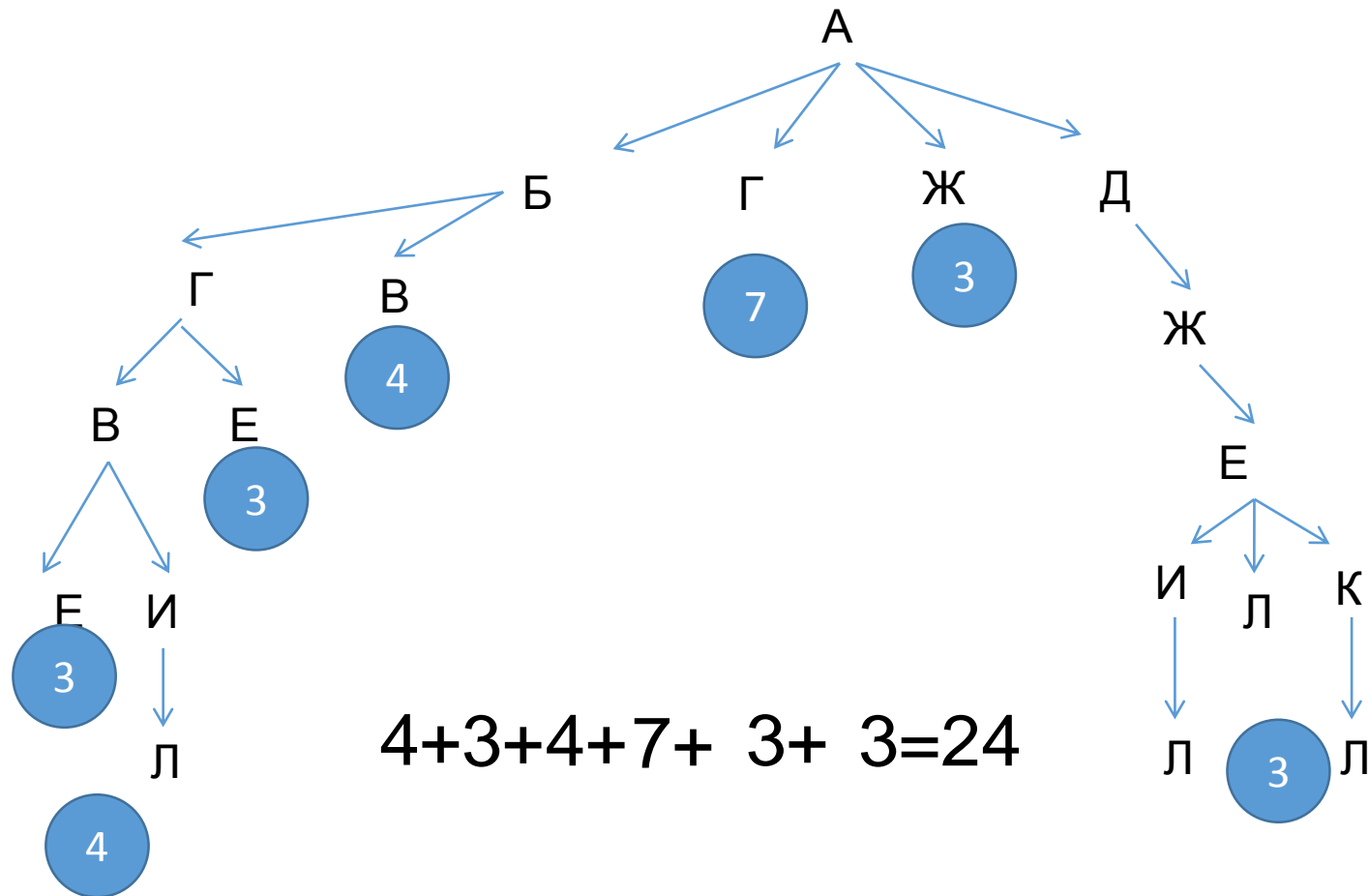
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Ответ: \_\_\_\_\_.

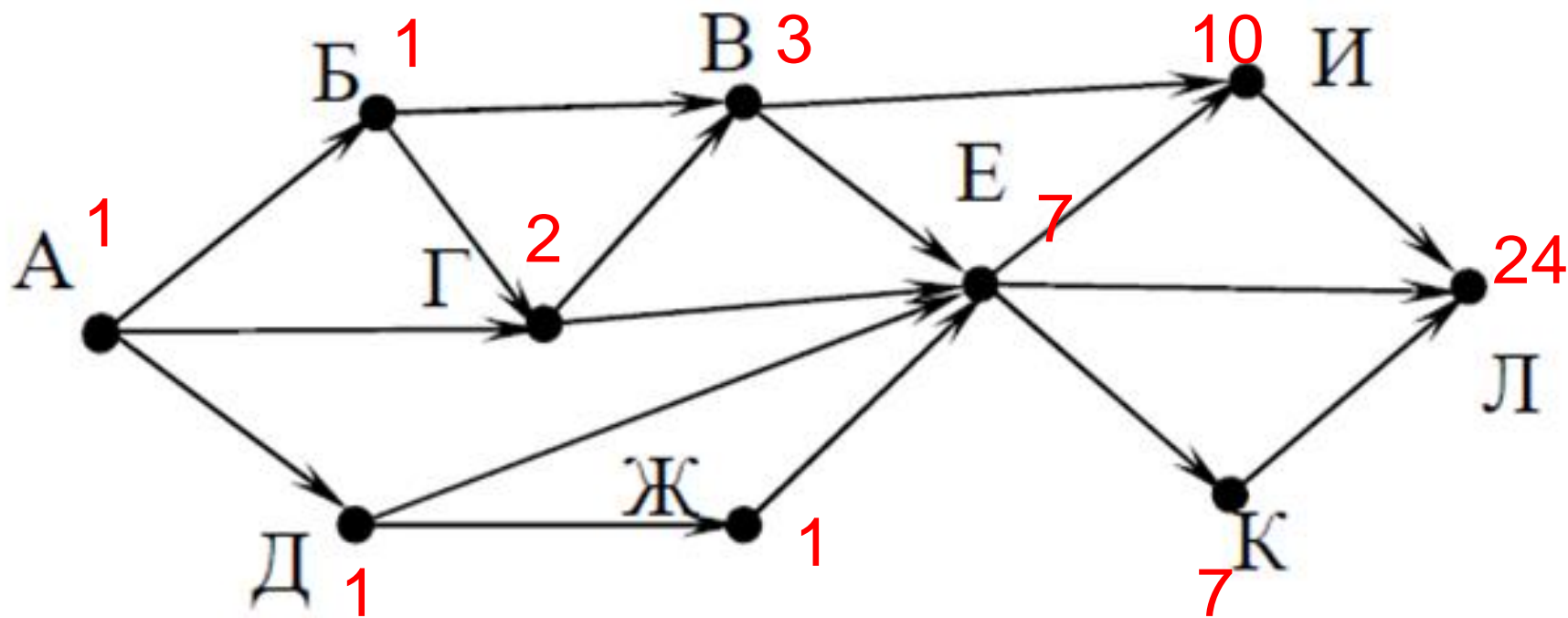
# Решение (прием 1)

Применим тот же подход, что и в задаче №4



# Решение (прием 2)

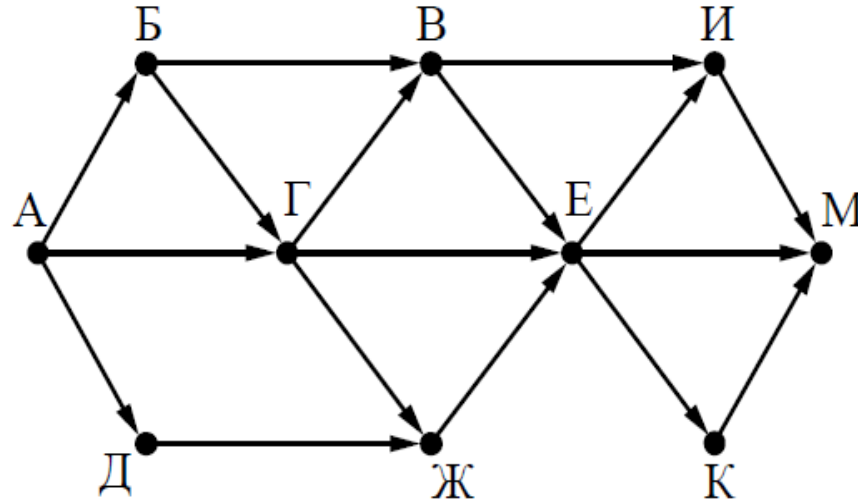
Подсчитаем степень вершин графа



# Задачи для тренировки

20

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и проходящих через город Г?

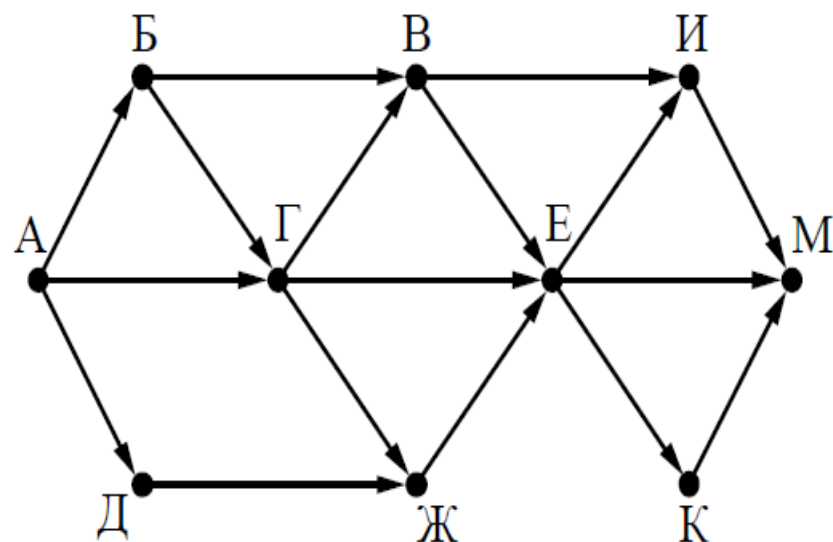


Ответ: 20.



20

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и **НЕ** проходящих через город Г?



Ответ: 13.

## Задача 4.

- По каналу связи передаются сообщения, содержащие только 5 букв А, И, К, О, Т. Для кодирования букв используется неравномерный двоичный код с такими кодовыми словами:
- А — 0, И — 00, К — 10, О — 110, Т — 111.
- Среди приведённых ниже слов укажите такое, код которого можно декодировать только одним способом. Если таких слов несколько, укажите первое по алфавиту.

- прежде всего заметим, что для заданного кода не выполняется ни прямое, ни обратное условие Фано; «виновата» в этом пара А – И: код буквы А совпадает как с началом, так и с окончанием кода буквы И; больше ни для одной пары кодовых слов прямое условие Фано не нарушено
- это означает, что не все сообщения могут быть декодированы однозначно
- теперь нужно понять, какие последовательности могут быть декодированы неоднозначно; в данном случае очевидно, что сообщения АА и И кодируются одинаково: 00,
- на всякий случай проверим вариант КОТ = 10110111; первой буквой может быть только К (по-другому сочетание 10 получить нельзя), аналогично вторая буква – только О, а третья – только Т

Ответ: КОТ

# Задача 5

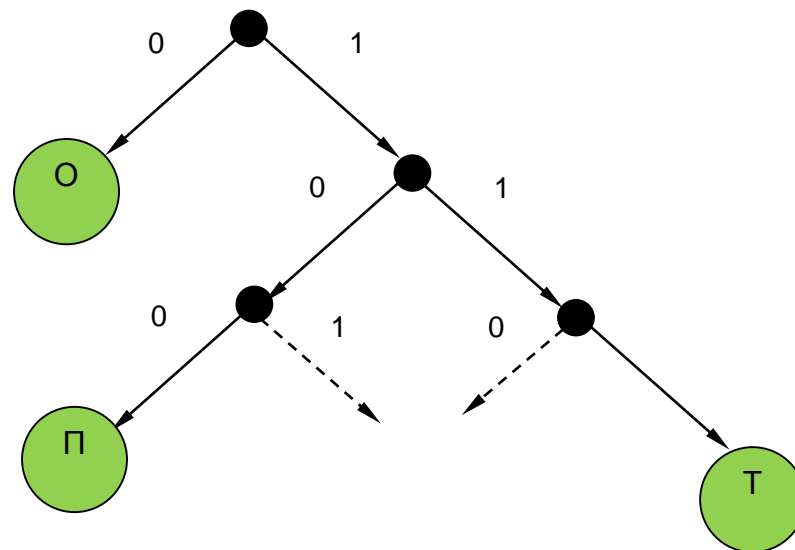
- По каналу связи передаются сообщения, содержащие только 4 буквы П, О, С, Т; для передачи используется двоичный код, допускающий однозначное декодирование. Для букв Т, О, П используются такие кодовые слова: Т: 111, О: 0, П: 100.
- Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы С, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

# Решение (способ 1, исключение вариантов):

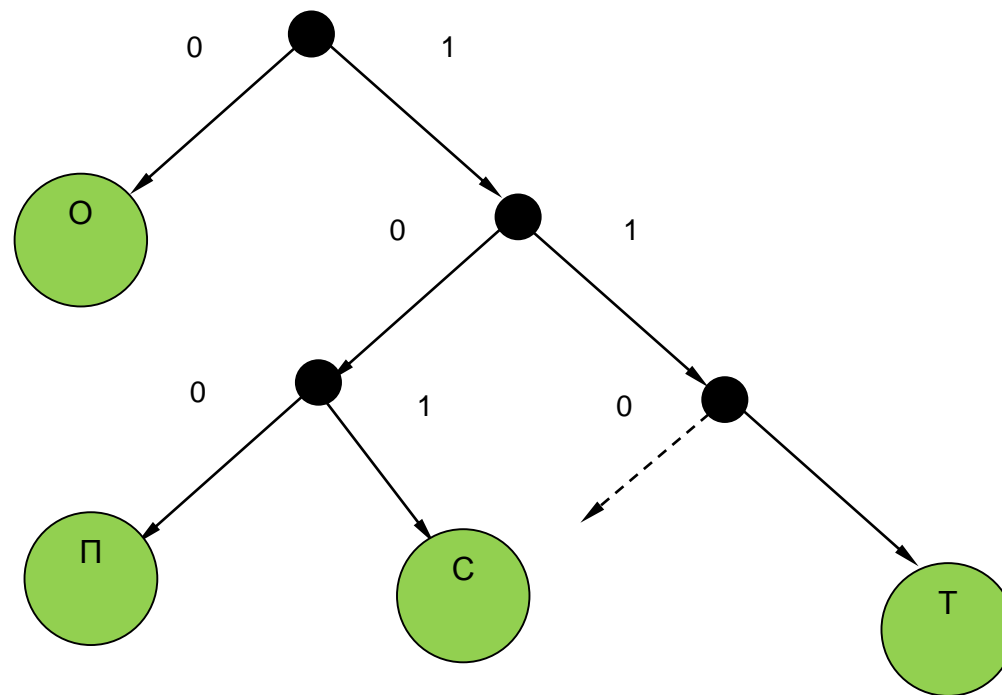
- код однозначно декодируется, если выполняется условие Фано или обратное условие Фано; в данном случае «прямое» условие Фано выполняется: с кода буквы О (0) не начинается ни один из двух других кодов;
- новый код не может начинаться с нуля (иначе нарушится условие Фано)
- начнём проверку с кодов длиной 1; единственный код, не начинающийся с нуля – 1 – не подходит, потому что с 1 начинаются два других кода: Т (111) и П (100)
- кодов длиной 2, начинающихся с 1, всего 2: 10 и 11, но их использовать нельзя, потому что с 10 начинается код буквы П, а с 11 – код буквы Т
- рассматриваем коды длиной 3, начинающиеся с 1; коды 100 и 111 уже заняты, а ещё два – 101 и 110 – свободны и их можно использовать, причём условие Фано выполняется в обоих случаях;
- поскольку нужно выбрать код с минимальным значением, выбираем 101
- Ответ: 101.

# Решение (способ 2, построение дерева):

- условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова; при этом в дереве кода все кодовые слова должны располагаться в листьях дерева, то есть в узлах, которые не имеют потомков;
- построим дерево для заданных кодовых слов О – 0, Т – 111 и П – 100:



штриховыми линиями отмечены две «пустые» ветви, на которые можно «прикрепить» лист для кодового слова буквы С: 101 или 110; из них минимальное значение имеет код 101



- таким образом, выбрав кодовые слова А – 0, Б – 110, В – 10, Г – 111, получаем суммарную длину кодовых слов 9 символов
- Ответ: 101.

# Задания для тренировки

- Для кодирования букв А, Б, В, Г решили использовать двухразрядные последовательные двоичные числа (от 00 до 11 соответственно). Если таким способом закодировать последовательность символов ГБАВ и записать результат в шестнадцатеричной системе счисления, то получится:
- 1)  $132_{16}$     2)  $D2_{16}$     3)  $3102_{16}$     4)  $2D_{16}$



- Для 5 букв латинского алфавита заданы их двоичные коды (для некоторых букв - из двух бит, для некоторых - из трех). Эти коды представлены в таблице:
- a    b    c    d    e
- 000 110  01    001  10
- Определите, какой набор букв закодирован двоичной строкой 1100000100110
- 1) baade    2) badde    3) bacde    4) bacdb

- Для кодирования букв А, Б, В, Г используются четырехразрядные последовательные двоичные числа от 1000 до 1011 соответственно. Если таким способом закодировать последовательность символов БГАВ и записать результат в восьмеричном коде, то получится:
- 1) 175423      2) 115612      3) 625774) 12376

## Задача 3.

- *Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?*

- буква С может стоять на одном из пяти мест: С\*\*\*\*, \*С\*\*\*, \*\*С\*\*, \*\*\*С\* и \*\*\*\*С, где \* обозначает любой из оставшихся трёх СИМВОЛОВ
- в каждом случае в остальных четырёх позициях может быть любая из трёх букв Л, О, Н, поэтому при заданном расположении буквы С имеем  $3^4 = 81$  вариант
- всего вариантов  $5 \cdot 81 = 405$ .
- Ответ: 405.

## Задача 4.

- *Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно две буквы A?*



## Задача 6.

- *Сколько слов длины 5, начинающихся с гласной буквы, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.*

- первая буква слова может быть выбрана двумя способами (Е или Э), остальные – тремя
- общее число различных слов равно  $2 * 3 * 3 * 3 * 3 = 162$
- ответ: 162.



- Дано слово длиной 5 символов типа **\*\*\*\*\***, где красная звездочка – гласная буква (Е или Э), а черная буква любая из трёх заданных.
- Общая формула количества вариантов:
- $N = M^L$ , где  $M$  – мощность алфавита, а  $L$  – длина кода.
- Так как положение одной из букв строго регламентировано (знак умножения в зависимых событиях), то формула всех вариантов примет вид:  $N = M_1^{L_1} \cdot M_2^{L_2}$ ,
- Тогда  $M_1 = 2$  (алфавит гласных букв), а  $L_1 = 1$  (только 1 позиция в слове).
- $M_2 = 3$  (алфавит всех букв), а  $L_2 = 4$  (оставшиеся 4 позиции в слове).
- В итоге получаем:  $N = 2^1 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$ .
- ответ: 162.

# Задача 7

- *Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:*
- **1. КККК**
- **2. КККЛ**
- **3. КККР**
- **4. КККТ**

- самый простой вариант решения этой задачи – использование систем счисления; действительно, здесь расстановка слов в алфавитном порядке равносильна расстановке по возрастанию чисел, записанных в четверичной системе счисления (основание системы счисления равно количеству используемых букв)
- выполним замену  $K \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow 1$ ,  $P \rightarrow 2$ ,  $T \rightarrow 3$ ; поскольку нумерация слов начинается с единицы, а первое число  $KKKK \rightarrow 0000$  равно 0, под номером 67 будет стоять число 66, которое нужно перевести в четверичную систему:  $66 = 1002_4$
- Выполнив обратную замену (цифр на буквы), получаем слово ЛККР.
- Ответ: ЛККР.

# Задача 8

- *Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.*
- *Вот начало списка:*
- **1. ААААА**
- **2. ААААО**
- **3. ААААУ**
- **4. АААОА**
- **.....**
- *Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.*

# 1 способ

- подсчитаем, сколько всего 5-буквенных слов можно составить из трех букв;
- очевидно, что есть всего 3 однобуквенных слова (А, О, У); двух буквенных слов уже  $3 \times 3 = 9$  (АА, АО, АУ, ОА, ОО, ОУ, УА, УО и УУ)
- аналогично можно показать, что есть всего  $3^5 = 243$  слова из 5 букв
- очевидно, что последнее, 243-е слово – это УУУУУ
- далее идём назад: предпоследнее слово УУУУО (242-е), затем идет УУУУА (241-е) и, наконец, УУУОУ (240-е)
- Ответ: УУУОУ.

## 2 способ

- по условию задачи важно только то, что используется набор из трех разных символов, для которых задан порядок (алфавитный); поэтому для вычислений можно использовать три любые символа, например, цифры 0, 1 и 2 (для них порядок очевиден – по возрастанию)
- выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:
- **1. 00000**
- **2. 00001**
- **3. 00002**
- **4. 00010**
- .....
- это напоминает (в самом деле, так оно и есть!) числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
- тогда легко понять, что 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
- переведем 239 в троичную систему:  $239 = 22212_3$
- заменяем обратно цифры на буквы:  $22212 \rightarrow \text{УУУОУ}$
- Ответ: УУУОУ.

# Задания для тренировки

- Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:
- **1. ААААА**
- **2. ААААО**
- **3. ААААУ**
- **4. АААОА**
- .....
- Запишите слово, которое стоит на 101-м месте от начала списка.

- Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:
- **1. ААААА**
- **2. ААААК**
- **3. ААААР**
- **4. ААААУ**
- **5. АААКА**
- .....
- Запишите слово, которое стоит на 350-м месте от начала списка.



- Сколько слов длины 4, начинающихся с согласной буквы, можно составить из букв Л, Е, Т, О? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.